

УДК 532.5.296:534.12

## УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ В ТЕЛЕ ПРИ УДАРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ КАВИТАЦИОННОГО ПУЗЫРЬКА

*А.А. Аганин, М.А. Ильгамов, Н.А. Хисматуллина*

### Аннотация

Представлены математическая модель, методика расчета и некоторые результаты исследования упруго-пластических деформаций в теле в случае приложения к его поверхности нагрузки, моделирующей импульсное воздействие высокоскоростной кумулятивной струйки жидкости, возникающей при коллапсе примыкающего к телу кавитационного пузырька. Тело рассматривается как полупространство из идеального упруго-пластического материала. При построении закона нагружения считается, что кумулятивная струйка жидкости представляет собой цилиндрический столбик с полусферическим концом. Она бьет по телу ортогонально его поверхности. Основное внимание при исследовании уделено изменению положения и конфигурации возникающих в теле зон текучести, влиянию пластичности материала и неоднородности нагрузки в круговой области ее приложения.

**Ключевые слова:** кавитационный пузырек, упруго-пластическое тело, пластичность, интенсивность напряжений.

---

### Введение

Известно, что поверхности тел, находящихся в контакте с жидкостью, давление которой является переменным, подвержены кавитационной эрозии – разрушению под действием импульсов давления, возникающих при схлопывании кавитационных пузырьков. Для понимания природы разрушительного влияния кавитации важно знать особенности воздействия отдельного пузырька. Пузырек может находиться вдали от тела, быть недалеко от его стенки, когда между пузырьком и телом имеется тонкий слой жидкости, или примыкать непосредственно к поверхности тела. В первом случае воздействие пузырька осуществляется по схеме Рэлея [1], в которой сжатие пузырька предполагается сферическим. В двух последних случаях такое допущение принять нельзя, поскольку форма пузырька в процессе сжатия сильно изменяется. В этих случаях имеет место струйный механизм кавитационного разрушения [2–4]: при схлопывании пузырька вблизи стенки на его поверхности возникает высокоскоростная кумулятивная струя. Эта струя оказывает воздействие на стенку, вызывая в ней микроразрушения. Известно, что скорость струи может достигать нескольких сотен метров в секунду.

Краткий обзор работ по динамике пузырька у стенки приведен в [5]. Несмотря на большое количество публикаций, посвященных этой проблеме (например, [1–4, 6, 7]), ряд важных вопросов до сих пор остается неизученным. В настоящей работе исследуется один из наиболее разрушительных режимов воздействия на стенку тела высокоскоростной струей жидкости, образующейся на поверхности пузырька при его схлопывании около тела, когда в процессе воздействия в жидкости и теле возникают ударные волны (режим ударного воздействия).

Задача ставится как осесимметричная. Осью симметрии является ось симметрии струи. Полость пузырька по сравнению с радиусом струи считается настолько

большой, что влиянием жидкости вне струи можно пренебречь. Кроме того, так как линейные размеры кавитационного пузырька намного меньше размеров тела, протяженность тела принимается бесконечной. С учетом указанных допущений воздействие образующейся на поверхности кавитационного пузырька струи рассматривается в настоящей работе как воздействие цилиндрического столбика жидкости с полусферическим концом, бьющего по плоской стенке упруго-пластического тела (полупространства) по нормали к его поверхности.

Однако даже при таких допущениях решение задачи в гидроупругой постановке, то есть с учетом взаимодействия струи и стенки упруго-пластического тела, остается весьма сложным. Поэтому в настоящей работе изучается динамика тела (полупространства) при нагружении, типичном для ударного воздействия струи жидкости на поверхность тела. При этом тело моделируется как идеальное упруго-пластическое с условием Мизеса в пластических зонах.

В начале воздействия удар струи с полусферическим концом аналогичен удару сферической капли. Поэтому в настоящей работе при аппроксимации закона нагружения стенки упруго-пластического тела наряду с результатами работы [8], относящимися к удару струи с полусферическим концом по жесткой стенке, применяются также и данные работы [9], где рассматривается удар сферической капли о жесткую преграду. В этих работах показано, что наибольшая нагрузка на тело возникает в самом начале воздействия, когда радиус нагруженной области значительно меньше радиуса струи (капли). При ударе струи о поверхность тела в жидкости формируется ударная волна, которая распространяется в струе навстречу ее движению. В начале воздействия фронт этой волны за счет натекания струи на стенку сохраняется примыкающим к контуру круговой области соприкосновения струи с телом. При этом нагрузка в каждый момент времени оказывается пространственно-неоднородной, возрастая от центра нагруженной области к ее периферии, причем максимальное значение увеличивается со временем. Далее в некоторый момент времени струя начинает растекаться по поверхности тела с образованием на ней радиально-расходящейся высокоскоростной цилиндрической струйки, максимум давления на тело резко падает.

В соответствии с описанной картиной изменения нагрузки используемый в настоящей работе закон нагружения стенки тела учитывает как зависимость величины нагрузки от радиальной координаты и времени, так и расширение нагруженной области. Профиль нагрузки в каждый момент времени задается в виде параболы на отрезке  $0 \leq r \leq R_L(t)$ , где  $r$  – радиальная координата, отсчитываемая от центра нагружения, находящегося на оси симметрии задачи,  $R_L(t)$  – радиус области контакта струи и тела. Рассматривается промежуток времени, в котором  $R_L(t) < R$ , где  $R$  – радиус струи. Максимальное значение нагрузки растет до некоторого момента, а затем постепенно уменьшается. Скорость расширения области контакта определяется параметрами натекающей струи [9].

Для оценки влияния пластичности материала тела и радиальной неоднородности в законе нагружения рассматриваются также и две упрощенные формулировки задачи. В первой из них закон нагружения полагается таким же, как и в основной задаче, но тело рассматривается как линейно-упругое полупространство. Это позволяет оценить влияние пластичности тела. При втором упрощении нагрузка полагается изменяющейся со временем так же, как в основной аппроксимации, но радиальное распределение нагрузки в круговой области контакта с увеличивающимся радиусом  $R_L(t)$  принимается однородным. Сравнение дает возможность оценить влияние радиальной неоднородности нагружения. Показано, что упрощение как модели тела, так и вида нагрузки приводит к значительным изменениям распределений напряжений в теле.

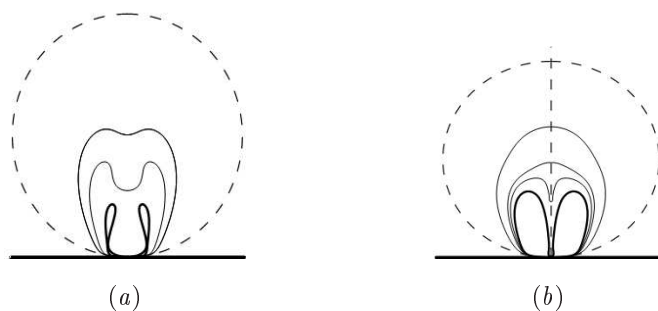


Рис. 1. Схлопывание несферических пузырьков у стенки. Штриховыми линиями показана начальная форма пузырьков, жирными сплошными – их форма в момент соприкосновения конца струи и стенки

## 1. Постановка задачи, математическая модель и методика расчета

**1.1. Постановка задачи.** Рассматривается осесимметричная динамика упруго-пластического тела в окрестности приложения к его поверхности нагружения, типичного для удара по телу цилиндрической струи жидкости с полусферическим концом. Радиус и скорость струи являются характерными для воздействия на стенку тела примыкающего к нему кавитационного пузырька в финале его схлопывания. Ось симметрии струи является осью симметрии задачи. Линейные размеры кавитационных пузырьков обычно намного меньше размеров тела. С учетом этого рассматриваемое тело считается упруго-пластическим полупространством. Форма пузырьков при их схлопывании вблизи стенки отлична от сферической. На рис. 1 представлены два из возможных сценария схлопывания таких пузырьков [10]. В случае, показанном на рис. 1, а, начальная форма пузырька представляет собой слегка вытянутый вдоль вертикальной оси симметрии эллипсоид вращения. В финале сжатия такого пузырька радиус струи жидкости, направленной по нормали к стенке тела, сравним с текущим радиусом пузырька. В случае же, показанном на рис. 1, б, пузырек в начале сжатия имеет вид слегка приплюснутого вдоль оси симметрии эллипсоида. В результате радиус аналогичной струи жидкости оказывается намного меньше радиуса пузырька. В первом случае масса струи в несколько раз больше, чем во втором, тогда как скорость струи в момент ее удара по стенке тела, наоборот, в несколько раз меньше. С учетом этого сложно сделать заключение относительно того, воздействие какой из этих струй будет более разрушительным. Принимаемые в настоящей работе допущения соответствуют воздействию пузырька с тонкой струей, когда полость пузырька по сравнению с радиусом струи является настолько большой, что влиянием жидкости вне струи можно пренебречь.

Принимается, что струя начинает воздействовать на тело в тот момент, когда ее конец касается поверхности тела. Радиальные распределения давления в струе, скорость которой  $v_0 = 500$  м/с, вдоль стенки в три последовательных момента времени приведены на рис. 2, взятом из работы [8]. В момент  $t_1$  в результате торможения струи стенкой давление в области контакта резко возрастает. Далее (моменты  $t_2, t_3$ ) в центральной части круговой области нагружения поверхности тела оно несколько уменьшается, в то время как на периферии из-за натекания струи возрастает. В результате радиальный профиль давления жидкости вдоль поверхности тела оказывается близким к степенному. В момент времени  $t_3$  достигается максимальное давление. В дальнейшем струя начинает растекаться и давление падает [9].

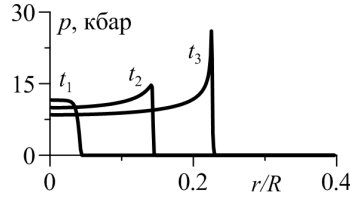


Рис. 2. Радиальные распределения давления жидкости в струе на стенке в три последовательных момента времени. Скорость струи  $v_0 = 500$  м/с

**1.2. Аппроксимация закона нагружения.** В настоящей работе рассматривается удар по стенке тела струи жидкости с полусферическим концом. При этом применяется аппроксимация закона нагружения, в которой радиальный профиль нагрузки в круговой области контакта струи с телом  $0 \leq r \leq R_L(t)$  имеет вид следующей зависимости:

$$p_L(r, t) = [p_L^{\max}(t) - \tilde{p}(t)] \left( \frac{r}{R_L} \right)^2 + \tilde{p}(t), \quad (1)$$

где  $p_L^{\max}(t)$  – максимальное значение нагрузки в момент времени  $t$ ,

$$p_L^{\max} = \begin{cases} 4.07p_* \left( \frac{R_L}{R} \right)^{0.98} + p_*, & \text{если } \frac{R_L}{R} \leq 0.24, \\ 0.057p_* \left( \frac{R_L}{R} \right)^{-2.49}, & \text{если } \frac{R_L}{R} > 0.24, \end{cases} \quad (2)$$

$\tilde{p}(t)$  – значение нагрузки на оси симметрии,

$$\tilde{p}(t) = p_* \left[ 6.14 \cdot 10^{-5} \left( \frac{tc_1}{R} \right)^2 - 3.67 \cdot 10^{-2} \frac{tc_1}{R} + 1 \right], \quad (3)$$

$c_1$  – скорость распространения продольных возмущений в теле,  $p_*$  – максимальное значение давления на поверхности упругого полупространства при одномерном ударе по ней по нормали осесимметричной струи с плоским концом бесконечного радиуса. Величина  $p_*$  определяется выражением

$$p_* = p_0 + v_0 \frac{\rho_L c_L \rho c_1}{\rho_L c_L + \rho c_1} \approx v_0 \rho_L c_L,$$

в котором  $p_0$  – давление жидкости в струе (и в окружающей ее газовой среде),  $\rho_L$  – плотность жидкости,  $c_L$  – скорость звука в жидкости,  $\rho$  – плотность материала тела. Вне области контакта струи с телом  $0 \leq r \leq R_L(t)$  принимается  $p_L(r, t) = p_0$ .

Графики зависимости (1) для семи характерных моментов времени приведены на рис. 3, а.

При ударе струи с полусферическим концом радиус  $R_L$  круговой области нагружения стенки тела на представляющем наибольший интерес начальном отрезке времени, который завершается началом растекания струи по поверхности тела, описывается выражением [9]

$$R_L = \sqrt{2Rv_0t - v_0^2t^2}, \quad (4)$$

а скорость  $v_L$  увеличения этого радиуса – следующим:

$$v_L = \frac{v_0(R - v_0t)}{\sqrt{2Rv_0t - v_0^2t^2}}, \quad (5)$$

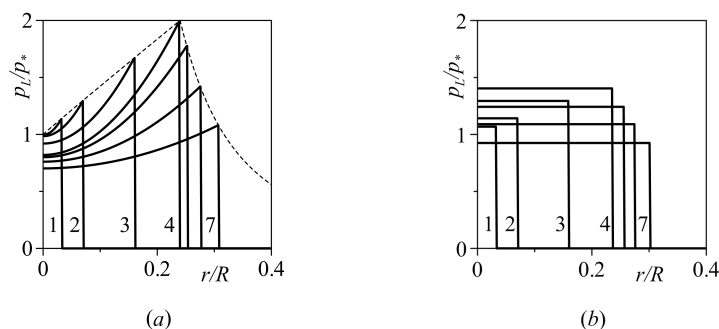


Рис. 3. Радиальное распределение нагрузки и ее изменение со временем в основной аппроксимации (1) закона нагружения стенки тела при ударе по ней струи с полусферическим концом (а) и упрощении этой аппроксимации (б)

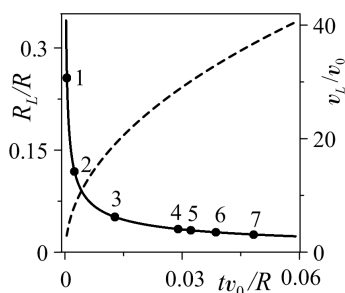


Рис. 4. Зависимости безразмерных радиуса  $R_L/R$  (штриховая кривая) и скорости расширения  $v_L/v_0$  (сплошная кривая) круговой области нагружения стенки тела при ударе по ней струи с полусферическим концом от безразмерного времени

где  $v_0$  – скорость струи. Эти выражения используются в настоящей работе, в том числе и на представляющей меньший интерес стадии растекания струи, где они, строго говоря, неверны. Однако, как представляется, наиболее важным аспектом стадии растекания является то, что на этой стадии нагрузка на стенку тела с течением времени уменьшается. В принятой аппроксимации закона нагружения этот аспект учитывается.

Закон изменения радиуса  $R_L$  области нагружения и скорости  $v_L$  с течением времени иллюстрирует рис. 4. Точками на этом рисунке обозначены те моменты, для которых приведены профили нагрузок на рис. 3. Видно, что на начальном интервале времени радиус  $R_L$  быстро растет от нуля, а скорость  $v_L$  очень быстро уменьшается, что обусловлено расширением круговой области контакта между струей и стенкой тела. В последующем скорость  $v_L$  уменьшается до нуля, рост радиуса  $R_L$  тоже замедляется.

Отметим, что для скорости  $v_L$  справедлива также формула  $v_L = v_0 \operatorname{ctg} \beta$ , где  $\beta$  – угол наклона касательной к поверхности струи в точке ее контакта с поверхностью тела. Она получается из (5) с учетом того, что  $\cos \beta = (R - v_0 t)/R$ .

Для анализа влияния радиальной неоднородности закона нагружения наряду с его основной аппроксимацией (1) рассматривается также и ее упрощение. Оно представляет собой осреднение величины нагрузки по площади области нагружения и определяется выражением

$$p_L(r, t) = \frac{p_L^{\max}(t) + \tilde{p}(t)}{2} \quad (6)$$

в области  $0 \leq r \leq R_L(t)$ , где  $p_L^{\max}(t)$  и  $\tilde{p}(t)$  вычисляются по формулам (2) и (3) соответственно, а радиус  $R_L$  – по формуле (4). Изменение нагрузки в этом случае приведено на рис. 3, *b*.

**1.3. Уравнения динамики тела и его начальное состояние.** Для описания динамики тела используются следующие уравнения: [11]

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial(S_{rr} - P)}{\partial r} + \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} + \frac{S_{rr} - S_{\varphi\varphi}}{r}, & \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial(S_{zz} - P)}{\partial z} + \frac{S_{rz}}{r}, \\ \frac{\partial S_{rr}}{\partial t} &= \frac{2}{3}\mu \left( 2\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{u}{r} \right), & \frac{\partial S_{zz}}{\partial t} &= -\frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} - 2\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u}{r} \right), \\ \frac{\partial S_{\varphi\varphi}}{\partial t} &= -\frac{2\mu}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{2u}{r} \right), & \frac{\partial S_{rz}}{\partial t} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= -K \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u}{r} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $r, z$  – радиальная и осевая координаты цилиндрической системы отсчета;  $t$  – время;  $u, v$  – компоненты скорости по осям  $r$  и  $z$  соответственно;  $S_{rr}, S_{zz}, S_{\varphi\varphi}, S_{rz}$  – компоненты девиатора  $S$  тензора напряжений  $\sigma$ , записанные в цилиндрической системе координат,  $P$  – всестороннее (гидростатическое) давление;  $S = \sigma + Pg$ ;  $g$  – метрический тензор;  $\lambda = \rho(c_1^2 - 2c_2^2)$  и  $\mu = \rho c_2^2$  – параметры Ламе,  $c_1$  и  $c_2$  – продольная и сдвиговая скорости звука.

Считается, что в начальный момент времени  $t = 0$  деформации в теле в радиальном и окружном направлениях отсутствуют. При этом реализуется статическое напряженное состояние

$$\sigma_z^0 = -p_0, \quad \sigma_r^0 = \sigma_\phi^0 = -\lambda(\lambda + 2\mu)^{-1}p_0, \quad \tau_{rz}^0 = 0, \quad u^0 = v^0 = 0, \quad (8)$$

где  $\sigma_r^0, \sigma_z^0, \sigma_\phi^0, \tau_{rz}^0$  – начальные значения соответствующих компонент тензора напряжений  $\sigma$  в цилиндрической системе координат.

**1.4. Основные положения методики расчета, учет пластичности.** На бесконечном удалении от места приложения нагрузки параметры тела считаются невозмущенным. В расчетах бесконечная область  $0 \leq r < \infty, -\infty < z \leq 0$  заменяется конечной цилиндрической областью  $0 \leq r < r_s, h_s < z \leq 0$  (рис. 5). Внешние границы  $r = r_s$  и  $z = h_s$  являются «искусственными». Они выбираются столь далекими, чтобы отраженные от них волны не оказывали заметного влияния на величину экстремальных напряжений в теле (экстремальные напряжения возникают в окрестности точки приложения максимальной нагрузки вблизи поверхности тела). Удаленность искусственных границ зависит от условий, принимаемых на этих границах. Можно, в частности, принять условия жесткой стенки, свободного края или неотражающие условия. Расчеты показывают [13], что в первом случае следует взять  $r_s = -h_s = 5R$ , во втором –  $r_s = -h_s = 3R$ , а в третьем можно положить  $r_s = -h_s = 2.2R$ . С учетом этого в настоящей работе на искусственных границах задаются неотражающие условия [14], а размеры расчетной области  $r_s = -h_s = 2.2R$ . Это позволило сократить время расчета по сравнению с условиями жесткой стенки в 6 раз, а по сравнению с условиями свободного края – в 1.5 раза.

На нагруженной части поверхности упругого тела полагается

$$\sigma_z = -p_L(r, t), \quad \tau_{rz} = 0 \quad (0 \leq r \leq R_L(t), \quad z = 0), \quad (9)$$

где  $p_L(r, t)$  – зависимость, определяемая законом нагружения (рис. 3).

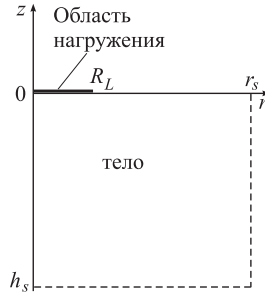


Рис. 5. Расчетная область

Для решения задачи (7), (8) применяется разностная схема Годунова первого порядка точности [15]. С целью оценки напряженного состояния в упругом теле и перехода из области упругих деформаций в область пластических используется интенсивность напряжений  $\sigma_i$ :

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_z - \sigma_\phi)^2 + (\sigma_r - \sigma_\phi)^2 + 6\tau_{rz}^2}.$$

В пластических зонах выполняется условие текучести Мизеса  $\sigma_i = Y_0$  [12], где  $Y_0$  – предел текучести материала при одноосном растяжении. Если условие текучести нарушается, то тензор напряжений корректируется по формуле

$$\sigma_{\text{corr}} = \frac{Y_0}{\sigma_i} \sigma. \quad (10)$$

При исследовании напряженно-деформированного состояния рассматриваемых в настоящей работе металлических тел экстремальные значения интенсивности напряжений  $\sigma_i$  и их положение в теле представляют, как правило, наибольший интерес. Для характеристики напряженного состояния тела применяется безразмерное возмущение интенсивности напряжений  $\varsigma_i$ , определяемое выражением

$$\varsigma_i = \frac{\sigma_i - \sigma_i^0}{\sigma_i^* - \sigma_i^0}.$$

Здесь  $\sigma_i^0$  – начальное значение интенсивности напряжений в теле,  $\sigma_i^*$  – максимальное значение  $\sigma_i$  в одномерной задаче об ударе цилиндрической струи с плоским концом бесконечного радиуса по упругому полупространству. Величины  $\sigma_i^0$  и  $\sigma_i^*$  определяются выражениями

$$\sigma_i^0 = -2p_0 \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2, \quad \sigma_i^* = \sigma_i^0 - 2 \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 (\sigma_z^* - \sigma_z^0) = 2 \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 p_*,$$

где  $\sigma_z^* = -p_*$ . Так как в рассматриваемых задачах  $p_0 \ll p_*$ , то можно принять  $\varsigma_i \approx \sigma_i / \sigma_i^* = \sigma_i (c_1/c_2)^2 / (2p_*)$ .

Для анализа максимальных по времени возмущений интенсивности напряжений используется безразмерная величина

$$\varsigma_i^{\max}(r, z) = \max_t \varsigma_i(r, z, t).$$

Выбор расчетной сетки для проведения исследований осуществляется с учетом сходимости численного решения по мере измельчения сетки. Рис. 6 характеризует

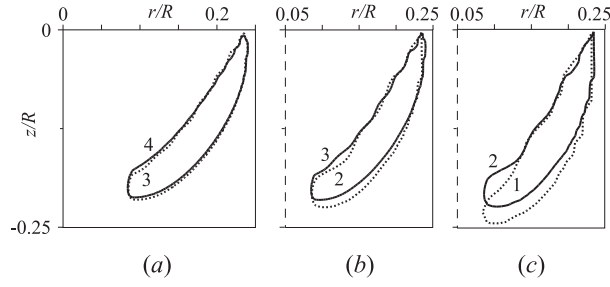


Рис. 6. Сходимость границы области пластических деформаций, определяемой уровнем  $\varsigma_i = Y_0/\sigma_i^*$ , в численном решении рассматриваемой задачи по мере измельчения равномерной расчетной сетки. Пунктирная кривая 1 (с) рассчитана на сетке с шагами  $R/160$ , кривые 2 (сплошная на (с) и пунктирная на (b)) – с  $R/320$ , кривые 3 (сплошная на (b) и пунктирная на (a)) – с  $R/640$ , сплошная кривая 4 (a) – с  $R/1280$

изменение конфигурации пластических зон и сходимость их границы по мере последовательного измельчения равномерных сеток с квадратными ячейками  $\Delta r = \Delta z = R/160, R/320, R/640$  и  $R/1280$  в момент времени  $t_4$  (рис. 3, а). Здесь  $\Delta r$  и  $\Delta z$  – шаги сетки по радиальной и осевой координатам соответственно. Видно, что на сетках с шагами с  $R/640$  и  $R/1280$  границы области пластических деформаций отличаются незначительно. С учетом этого при проведении исследований используется равномерная сетка с квадратными ячейками с  $\Delta r = \Delta z = R/640$ .

Шаг по времени определяется из условия устойчивости [11]

$$\tau = \frac{\delta}{c_1} \frac{\Delta r \cdot \Delta z}{\Delta r + \Delta z}$$

при  $\delta = 0.95$ .

## 2. Динамика упруго-пластического тела в приповерхностном слое в окрестности места приложения нагрузки

В рамках принятой постановки задачи динамика упруго-пластического тела при приложении к его поверхности нагрузки, характерной для удара цилиндрической струи с полусферическим концом, определяется девятью размерными параметрами: плотностью  $\rho_L$  и скоростью звука  $c_L$  в жидкости, плотностью материала тела  $\rho$ , скоростями распространения продольных  $c_1$  и сдвиговых  $c_2$  возмущений в теле, давлением жидкости в струе (и на поверхности тела вне области его контакта со струей)  $p_0$ , радиусом  $R$  и скоростью  $v_0$  струи, пределом текучести материала тела  $Y_0$ . В настоящей работе рассматривается удар водяной струи с  $\rho_L = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_L = 1450 \text{ м/с}$ ,  $R = 20 \text{ мкм}$ ,  $v_0 = 100 \text{ м/с}$  по стенке тела из никелевого сплава с  $\rho = 8000 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_1 = 5742.9 \text{ м/с}$ ,  $c_2 = 3069.7 \text{ м/с}$ ,  $Y_0 = 125 \text{ МПа}$  при  $p_0 = 0.1 \text{ МПа}$ . У сплавов может сильно варьироваться предел текучести при относительно небольших изменениях других характеристик. Кроме того, в рассматриваемых задачах влияние давления  $p_0$  мало. Поэтому основными параметрами в них фактически являются скорость струи  $v_0$  и предел текучести  $Y_0$ . Для принятых входных данных имеем  $p_* = 145 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_i^* = 83 \text{ МПа}$  и соответствующее пределу текучести значение  $\varsigma_i = Y_0/\sigma_i^* \approx 1.5$ .

**2.1. Изменение напряженного состояния тела в окрестности места приложения нагрузки.** В принятой модели в качестве закона нагружения стенки тела при ударе по ней струи жидкости с полусферическим концом в круговой области контакта струи с телом  $0 \leq r \leq R_L(t)$  принимается аппроксимация (1).



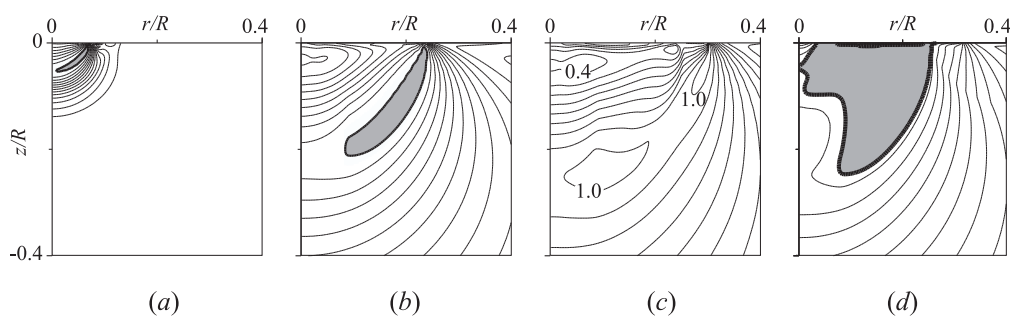


Рис. 7. Изолинии возмущений интенсивности напряжений в теле  $\zeta_i$  в моменты времени  $t_2$  (a),  $t_4$  (b) и  $t_7$  (c) и изолинии  $\zeta_i^{\max}$  (d) – максимальных по времени значений  $\zeta_i$  в ходе всего рассматриваемого процесса при воздействии на тело нагрузки, типичной для удара струи с полусферическим концом. Закрашены области пластических деформаций

Как уже отмечалось, соответствующие (1) радиальные профили нагрузки в области контакта струи с телом для семи характерных моментов времени  $t_1 - t_7$  представлены на рис. 3, a.

На рис. 7 приведены поля безразмерного возмущения интенсивности напряжений  $\zeta_i$  в окрестности места приложения нагрузки в три из представленных на рис. 3 момента времени  $t_2$ ,  $t_4$  и  $t_7$ . Кроме того, на рис. 7, d показаны изолинии максимальных по времени значений безразмерного возмущения интенсивности напряжения  $\zeta_i^{\max}(r, z)$ . Затемненными являются области тела, в которых в ходе рассматриваемого процесса возникают пластические деформации.

Согласно закону (1) круговая область приложения нагрузки расширяется из точки до тех пор, пока ее радиус  $R_L$  не станет равным радиусу струи  $R$ . В соответствии с этим возрастает и возмущенная область в теле в окрестности места приложения нагрузки. На коротком начальном отрезке времени скорость увеличения радиуса нагруженной области  $\dot{R}_L$  превосходит скорость распространения продольных возмущений  $c_1$ , с которой возмущенная область в теле увеличивается вдоль оси симметрии  $z$ , так что в начале процесса размеры возмущенной области в теле по оси  $r$  оказываются большими, чем по  $z$ . Ко времени  $t_1$  скорость расширения нагруженной области  $\dot{R}_L$  быстро падает до уровня  $c_1$ . В результате возмущенная область тела ко времени  $t_2$  становится близкой к полусферической.

На начальном отрезке времени по мере расширения круговой области нагружения величина нагрузки в центре ее приложения плавно уменьшается, в то время как на периферии она быстро возрастает до времени  $t_4$ . Вследствие этого в окрестности края нагруженной части поверхности тела растут и сдвиговые напряжения. Незадолго до времени  $t_2$  достигается предел текучести материала, в результате возникают пластические деформации. В момент  $t_2$  область пластических деформаций приобретает форму купола с отверстием в области оси симметрии, осевое сечение которого представлено на рис. 7, a. На отрезке  $[t_2, t_4]$  максимальное значение нагрузки на периферии области ее приложения продолжает увеличиваться. В результате увеличивается и область пластических деформаций. Из рис. 7, b видно, что в момент  $t_4$  приложения максимальной по величине нагрузки область пластических деформаций представляет собой полосу, простирающуюся от края нагруженной части поверхности как вглубь тела, так и в направлении оси симметрии. Расстояние между этой полосой и осью симметрии составляет примерно 10% радиуса струи. В последующем максимум нагрузки уменьшается, уменьшаются и размеры области пластических деформаций. Незадолго до времени  $t_7$  сдвиговые напряжения в теле уменьшаются, пластические деформации исчезают.

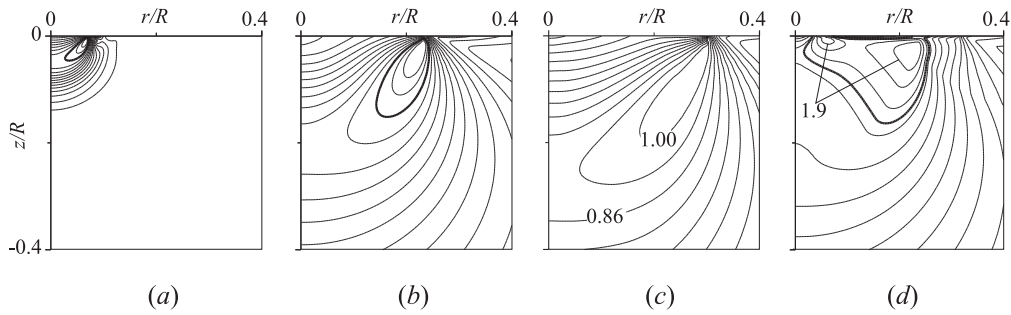


Рис. 8. То же, что на рис. 7, но без учета пластичности материала тела. Жирной линией обозначен уровень  $\varsigma_i = Y_0/\sigma_i^*$ , который в данном случае принимается за границу области «пластических деформаций»

Из рис. 7, *d* следует, что часть тела, в которой в рассматриваемом процессе возникают пластические деформации, имеет размеры около  $1/3$  радиуса струи  $R$  как в осевом, так и в радиальном направлениях. При этом в небольшой конусообразной приповерхностной зоне тела в окрестности центра области приложения нагрузки, что соответствует центру ударного воздействия струи, пластические деформации не возникают.

**2.2. Влияние пластичности.** Для оценки влияния пластичности материала на процесс деформирования тела в окрестности места приложения нагрузки используется численное решение рассматриваемой задачи в упругой постановке. В этом случае в качестве области «пластических деформаций» принимается та часть тела, в которой уровень напряжений превышает предел текучести материала. В соответствии с этим за границу области «пластических деформаций» принимается изолиния  $\varsigma_i = Y_0/\sigma_i^*$  поля  $\varsigma_i$ . Изменение напряженного состояния линейно-упругого тела в моменты  $t_2$ ,  $t_4$  и  $t_7$  и распределение максимальных по времени значений интенсивности напряжения  $\varsigma_i^{\max}(r, z)$  иллюстрирует рис. 8.

Сопоставление рис. 8 и 7 позволяет оценить некоторые особенности влияния пластичности материала тела. В частности, на рис. 8 видно, что в моменты  $t_2$  и  $t_4$  максимум возмущения интенсивности напряжений существенно превышает предел текучести материала тела, а граница области, ограниченной изолинией  $\varsigma_i = Y_0/\sigma_i^*$  (она показана жирной линией), отличается от контура области пластических деформаций на рис. 7. Без учета пластичности протяженность области «текучести» меньше как в осевом, так в радиальном направлениях. При этом на положение ближней к поверхности тела части границы области пластических деформаций пренебрежение пластичностью влияет незначительно. Это связано с тем, что данная часть границы определяется прилагаемой нагрузкой. Ко времени  $t_7$  область «пластических деформаций» исчезает и без учета пластичности материала. Вместе с тем поля возмущений интенсивности напряжений в момент  $t_7$  с учетом и без учета эффекта пластичности довольно сильно различаются. Это хорошо видно, например, по изолиниям уровня  $\varsigma_i = 1$ . Кроме того, на рис. 7, *c*, в отличие от рис. 8, *c*, на оси симметрии недалеко от поверхности тела имеется локальный минимум.

Пластичность материала оказывает влияние на конфигурацию и размеры той части тела, в которой в ходе рассматриваемого процесса возникает текучесть (рис. 7, *d* и 8, *d*). Без учета пластичности ее размеры в осевом направлении значительно меньше. Кроме того, без учета пластичности часть тела в небольшой окрестности оси симметрии остается не затронутой «пластическими деформациями».

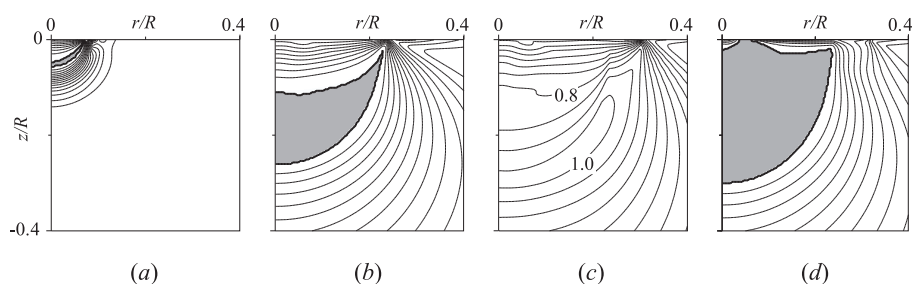


Рис. 9. То же, что на рис. 7, но для нагрузки, приведенной на рис. 3, *b*

**2.3. Влияние радиальной неоднородности нагрузки.** Для оценки влияния радиальной неоднородности нагрузки используется численное решение рассматриваемой задачи с законом нагружения, который иллюстрирует рис. 3, *b*. Он отличается от закона (1) тем, что величина нагрузки в расширяющейся области ее приложения изменяется лишь во времени, то есть в каждый момент времени она одинакова во всех точках приложения. Изменение напряженного состояния упруго-пластического тела при таком нагружении в те же, что и на рис. 7, моменты времени, показано на рис. 9.

Из сопоставления рис. 9, *a* и 7, *a* следует, что без учета радиальной неоднородности нагрузки конфигурация области, в которой предел текучести превышен, уже в момент  $t_2$  становится другой. В частности, без учета неоднородности область текучести у поверхности тела уже, в радиальном направлении простирается вплоть до оси симметрии, максимальные размеры области текучести достигаются в момент  $t_4$ , когда величина нагрузки становится наибольшей (рис. 9, *b*). К моменту  $t_7$  величина нагрузки без учета ее неоднородности, как и в случае ее учета, значительно уменьшается, интенсивность напряжений в теле всюду опускается ниже предела текучести (рис. 9, *c*). При этом поля возмущений интенсивности напряжений в момент  $t_7$  с учетом и без учета неоднородности нагрузки существенно различаются. Различаются и области, подвергавшиеся пластическим деформациям (см. рис. 7, *d* и 9, *d*). Так, без учета неоднородности нагрузки эта область значительно больше и имеет другую форму. Различие в форме состоит в том, что без учета неоднородности нагрузки более удаленная от поверхности тела часть границы области текучести имеет куполоподобный вид без имеющейся при учете радиальной неоднородности глубокой «вмятины» в относительно небольшой окрестности оси симметрии. Вместе с тем и без неоднородности нагрузки в небольшой конусообразной приповерхностной зоне тела в окрестности центра приложения нагрузки пластические деформации не возникают.

### Заключение

Представлены математическая модель и методика расчета упруго-пластических деформаций в теле в случае приложения к его поверхности нагрузки, характерной для импульсного воздействия высокоскоростной кумулятивной струйки жидкости, возникающей при коллапсе примыкающего к телу кавитационного пузырька. При конструировании закона нагружения кумулятивная струйка жидкости считается цилиндрическим столбиком с полусферическим концом, который бьет по телу ортогонально его поверхности. Тело моделируется идеальным упруго-пластическим полупространством. Его пластическое состояние описывается путем непрерывного понижения напряжений, превышающих предел текучести материала, до уровня, соответствующего этому пределу.

Исследовано изменение положения и конфигурации зон текучести, возникающих в приповерхностном слое тела из алюминиевого сплава ( $\rho = 8000 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_1 = 5742.9 \text{ м/с}$ ,  $c_2 = 3069.7 \text{ м/с}$ ) с пределом текучести  $Y_0 = 125 \text{ МПа}$  при ударе по поверхности тела водяной струи ( $\rho_L = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_L = 1450 \text{ м/с}$ ,  $R = 20 \text{ мкм}$ ), имеющей скорость  $v_0 = 100 \text{ м/с}$ . Установлено, что возникающая при таком ударе зона текучести имеет размеры около  $1/3$  радиуса струи  $R$  как в осевом, так и в радиальном направлениях. При этом в небольшой конусообразной приповерхностной части тела в окрестности центра области приложения нагрузки, что соответствует центру ударного воздействия струи, пластические деформации не возникают.

Изучена зависимость положения и конфигурации зон текучести в теле от пластичности его материала и радиальной неоднородности нагрузки в круговой области ее приложения. Для оценки влияния пластичности материала на процесс деформирования тела в окрестности места приложения нагрузки используется численное решение рассматриваемой задачи в упругой постановке. Показано, что без учета пластичности размеры зоны «текучести» в теле в осевом направлении оказываются значительно меньшими. Кроме того, часть тела в небольшой окрестности оси симметрии остается не затронутой «пластическими деформациями». При однородном законе нагружения область текучести получается по размерам больше. При этом ее более удаленная от поверхности тела часть границы имеет куполоподобную форму без имеющейся при учете радиальной неоднородности нагружения глубокой «вмятины» в относительно небольшой окрестности оси симметрии. Однако и при пренебрежении радиальной неоднородностью в законе нагружения в окрестности центра области приложения нагрузки остается небольшая конусообразная приповерхностная часть тела, в которой пластические деформации не возникают.

Работа выполнена в рамках программы РАН и при поддержке РФФИ (проект № 12-01-00341-а).

### Summary

*A.A. Aganin, M.A. Ilgamov, N.A. Khismatullina.* Elastic-Plastic Deformations in a Body under the Impact of a Cavitation Bubble.

The paper presents a mathematical model of, a calculation technique for and some results of investigation of elastic-plastic deformations in a body when a load is applied to its surface which simulates the pulse action of a high-speed cumulative liquid jet arising during the collapse of a cavitation bubble attached to the body. The body is considered to be a semi-space of perfect elastic-plastic material. While constructing the law of loading, the liquid jet is represented as a cylindrical column with a semi-spherical end. The jet strikes the body orthogonally to its surface. The plastic state is described by the continuous correction of stresses so that the yield strength of the material is not exceeded. Main attention in the study is drawn to the variation of the position and configuration of yielding zones arising in the body and to the influence of the plasticity of the material and the non-uniformity of the load in the circular area of its application.

**Keywords:** cavitation bubble, elastic-plastic body, plasticity, stress intensity.

### Литература

1. *Lord Rayleigh* On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity // *Philosophical Magazine*, Ser. 6. – 1917. – V. 34, No 200. – P. 94–98.
2. *Kornfeld M., Suvorov N.* On the destructive action of cavitation // *J. Appl. Phys.* – 1944. – V. 15, No 6. – P. 495–506.

3. *Plesset M.S., Chapman R.B.* Collapse of an initially spherical vapour cavity in the neighbourhood of a solid boundary // *J. Fluid Mech.* – 1971. – V. 47, Pt. 2. – P. 283–290.
4. *Lauterborn W., Bolle H.* Experimental investigations of cavitation-bubble collapse in the neighbourhood of a solid boundary // *J. Fluid Mech.* – 1975. – V. 72, Pt. 2. – P. 391–399.
5. *Аганин А.А., Ильгамов М.А., Малахов В.Г., Халитова Т.Ф., Хисматуллина Н.А.* Ударное воздействие кавитационного пузырька на упругое тело // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* – 2011. – Т. 153, кн. 1. – С. 131–146.
6. *Аганин А.А., Малахов В.Г., Халитова Т.Ф., Хисматуллина Н.А.* Силовое воздействие кавитационного пузырька на упругое тело // *Проблемы нелинейной механики деформируемого твердого тела: Тр. Второй междунар. конф.* – Казань: Казан. гос. ун-т, 2009. – С. 20–24.
7. *Mettin R., Luther S., Lindau O., Koch P., Lauterborn W.* Investigations of cavitation bubble dynamics by means of fast cinematography // *The Int. Conf. on Multiphase Systems, ICMS'2000.* – Ufa: Gilem & Pol Publ., 2000. – P. 279–287.
8. *Аганин А.А., Ильгамов М.А., Халитова Т.Ф.* Ударное воздействие струи на жесткую стенку // *Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 20-летию ИММ КазНЦ РАН.* – Казань: Фолиант, 2011. – Т. 1. – С. 134–145.
9. *Haller K.K., Ventikos Y., Poulikakos D., Monkewitz P.* Computational study of high-speed liquid droplet impact // *J. Appl. Phys.* – 2002. – V. 92, No 5. – P. 2821–2828.
10. *Аганин А.А., Ильгамов М.А., Косолапова Л.А., Малахов В.Г.* Схлопывание кавитационного пузырька в жидкости вблизи твердой стенки // *Вестн. Башкир. ун-та.* – 2013. – Т. 18, № 1. – С. 15–21.
11. *Чебан В.Г., Навал И.К., Сабодаш П.Ф., Чередниченко Р.А.* Численные методы решения задач динамической теории упругости. – Кишинев: Штиинца, 1976. – 226 с.
12. *Уилкинс М.Л.* Расчет упруго-пластических течений // *Вычислительные методы в гидродинамике.* – М.: Мир, 1967. – С. 212–263.
13. *Аганин А.А., Малахов В.Г., Халитова Т.Ф., Хисматуллина Н.А.* Расчет силового воздействия кавитационного пузырька на упругое тело // *Вестн. Тат. гос. гуманитар.-пед. ун-та.* – 2010. – № 4(22). – С. 6–13.
14. *Ильгамов М.А., Гильманов А.Н.* Неотражающие условия на границах расчетной области. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 240 с.
15. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976. – 400 с.

Поступила в редакцию  
22.01.13

---

**Аганин Александр Алексеевич** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией, Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, г. Казань, Россия.

E-mail: [agalin@kfti.knc.ru](mailto:agalin@kfti.knc.ru)

**Ильгамов Марат Аксанович** – доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий лабораторией, Институт механики им. Р.Р. Мавлютова УНЦ РАН, г. Уфа, Россия.

E-mail: [ilgamov@anrb.ru](mailto:ilgamov@anrb.ru)

**Хисматуллина Наиля Абдулхаевна** – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, г. Казань, Россия.

E-mail: [nailya\\_hism@mail.ru](mailto:nailya_hism@mail.ru)